09-03-16

Previously on Loukas

- $\chi_v^2 = \sum_{i=1}^{v} N^2(0,1) \; (= G(\alpha = \frac{v}{2}, \beta = 2))$

- $t_v = \dfrac{N(0,1)}{\sqrt{\frac{\chi_v^2}{v}}}$, $F_{v_1,v_2} = \dfrac{\chi^2_{v_1}/v_1}{\chi^2_{v_2}/v_2}$

- $t_v^2 = F_{1,v}$, $F_{1-\alpha,v_1,v_2} = \dfrac{1}{F_{\alpha,v_2,v_1}}$

① $X_1, \dots, X_n$: τ.δ από πληθυσμό (μ, σ^2)

$E(\bar{x}) = \mu$, $Var(\bar{x}) = \sigma^2/n$

② $X_1, \dots, X_n$ τυχαίο δείγμα από πληθυσμό $N(\mu, \sigma^2)$

$\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$, $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$

③ Κεντρικό Οριακό Θεώρημα: $X_1, \dots, X_n$ τυχαίο δείγμα από πληθυσμό (μ, σ^2)

$\bar{X} \overset{\text{πρ}*}{\sim} N(\mu, \sigma^2/n)$ $\qquad \sum_{i=1}^{n} X_i \overset{\text{πρ}*}{\sim} N(n\mu, n\sigma^2)$

④ Κανονική προσέγγιση Διωνυμικής

$X \sim Bin(n,p)$ $\qquad \{ \mu\varepsilon \;\; \mu = E(x) = np, \; \sigma^2 = Var(x) = np(1-p) \}$

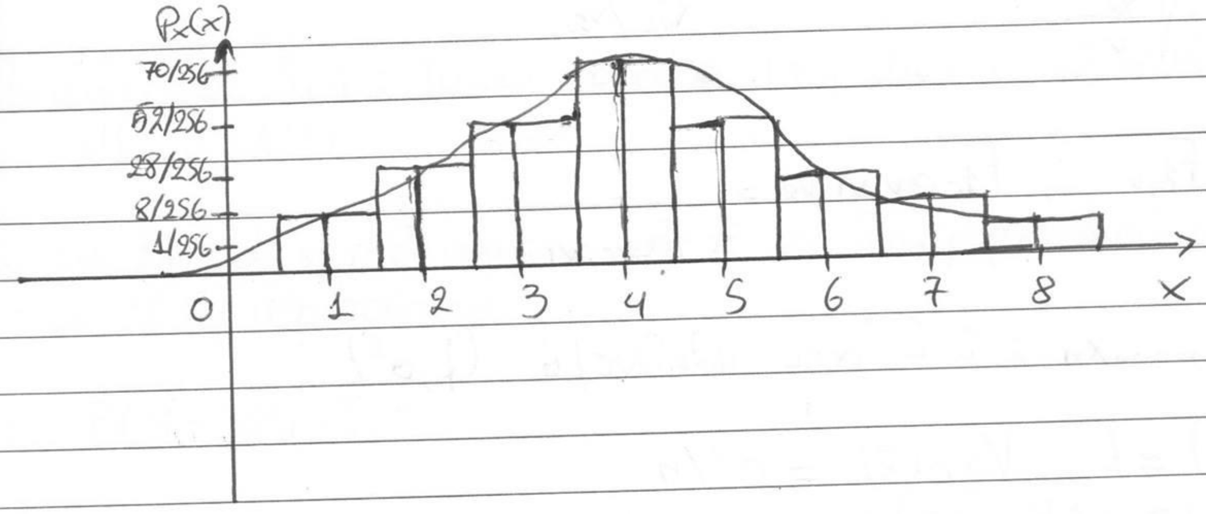
$X \overset{\text{πρ}*}{\sim} N(np, np(1-p))$

* προσεγγιστικά

Εφαρμογή: Έστω $X \sim Bin(n=8, p=1/2)$ και $P(3 \le X \le 6) =$

$= P(X=3) + \dots + P(X=6) \overset{*}{=}$

$P(X=x) = \binom{8}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{\binom{8}{x}}{256}$, $x = 0, 1, \dots, 8$



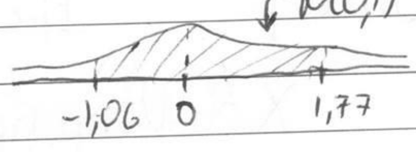
$\overset{*}{=} \frac{52}{256} + \frac{70}{256} + \frac{52}{256} + \frac{28}{256} = 0,82$

• $P(3 \le X \le 6) \approx P(2,5 \le X \le 6,5 \mid X \sim N(4,2)) =$

$= P\left(\frac{2,5-4}{\sqrt{2}} \le \underbrace{\frac{X-4}{\sigma}}_{= Z} \le \frac{6,5-4}{\sqrt{2}} \;\middle|\; Z \sim N(0,1) \right)$

$= P(-1,06 \le Z \le 1,77) = P(0 \le Z \le 1,06) + P(0 \le Z \le 1,77) =$

$= 0,3554 + 0,4616 = 0,817$



Παράδειγμα 3.3 (Βιβλίο Λουκά-Παπαϊωάννου) σελ. 85

Ένας μεγάλος αριθμός σπόρων μιας ποικιλίας λουλουδιών αναμειγνύεται με τις ακόλουθες αναλογίες ως προς το χρώμα λουλουδιού που θα παραχθεί: 2 κόκκινα, 2 άσπρα, 1 μπλε

Οι σπόροι αναμειγνύονται και συσκευάζονται τυχαία σε σακούλες των 100 σπόρων. Να βρεθεί η πιθανότητα μια σακούλα να περιέχει το πολύ 50 άσπρους σπόρους.

Λύση: Έστω X ο αριθμός των άσπρων σπόρων μιας σακούλας. Προφανώς, το διωνυμικό πείραμα μπορεί να υιοθετηθεί, κι αν X είναι ο αριθμός των άσπρων σπόρων μιας σακούλας, τότε $X \sim B(n=100, p=0,4)$, όπου p = πιθανότητα άσπρου σπόρου στο μείγμα =

$= \frac{2}{2+2+1} = \frac{2}{5}$. Τότε, η πιθανότητα που ζητάμε είναι

$$\sum_{x=0}^{50} \binom{100}{x} (0.4)^x (0.6)^{100-x}.$$

Η πιθανότητα αυτή, μπορεί να υπολογιστεί κατά προσέγγιση ως ακολούθως:

$$P(X \leq 50) \approx P(X < 50.5 \mid X \sim N(\mu=40, \sigma^2=24)) =$$

$$= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{50.5-40}{\sqrt{24}} \mid X \sim N(\mu=40, \sigma^2=24)\right) =$$

$$= P(Z < 2,14) = 0,9842$$

Παράδειγμα 3.2 (Βιβλίο Σ. Λουκά - Τ. Παπαϊωάννου) σελ. 87

Αν $X_1, \ldots, X_n$ είναι τυχαίο δείγμα από μια κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$ να βρεθούν:

i) Η κατανομή του $X_i - \bar{X}$, i = σταθερό

ii) Η κατανομή του $n(\bar{X}-\mu)^2/\sigma^2$

iii) Η μέση τιμή του S'^2, όπου $S'^2 = \sum(X_i - \bar{X}^2)/n$

iv) Η κατανομή του $\sum(X_i - \mu)^2/\sigma^2$

Λύση: i) Επειδή X_i και $\bar{X}$ δεν είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, θα έχουμε:

$$Y = X_i - \bar{X} = X_i - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j = \left(X_i - \frac{1}{n}X_i\right) - \frac{1}{n}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}} X_j =$$

$$= \frac{n-1}{n}X_i - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j$$ } → Ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές

Έτσι, $E(Y) = \frac{(n-1)}{n}E(X_i) - \frac{1}{n}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}} E(X_j) = \frac{n-1}{n}\mu - \frac{1}{n}(n-1)\mu = 0$

$$\cdot\, Var(Y) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 Var(X_i) + \frac{1}{n^2}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} Var(X_j) = \frac{(n-1)^2}{n^2}\sigma^2 + \frac{1}{n^2}(n-1)\sigma^2 =$$

$$= \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

Άρα, $X_i - \bar{X} \sim N\left(0, \frac{n-1}{n}\sigma^2\right)$

! Λάθος που θα πρέπει να αποφύγεις !

$E(X_i - \bar{X}) = \mu - \mu = 0$

$Var(X_i - \bar{X}) = Var X_i - Var \bar{X} = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} = \frac{n-1}{n}\sigma^2$

ΜΗΝ ΤΟΛΜΗΣΕΙΣ
{Ο Λουκάς θα...
στη "φέρει"!!!

Απαντήσεις ερωτημάτων:

ii) $n\frac{(\bar{X}-\mu)^2}{\sigma^2} \sim X_1^2$, iii) $E(S'^2) = E\left(\frac{n-1}{n} S^2\right) = \frac{n-1}{n} E(S^2) =$

$= \frac{n-1}{n}\sigma^2$

iv) $\Sigma\left(\frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}\right) \sim (X_v^2)$

Άσκηση 3.9 {Βιβλίο Λουκά - Παπαϊωάννου) σελ 88

Αν X_1, X_2 είναι τυχαίο δείγμα από μια τυπική κανονική κατανομή $N(0,1)$, να βρεθούν οι κατανομές των στατιστικών συναρτήσεων.

i) $(X_2 - X_1)/\sqrt{2}$, ii) $(X_1+X_2)^2/(X_2-X_1)^2$, iii) $(X_1+X_2)/\sqrt{(X_2-X_1)^2}$ και $\frac{X_2^2}{X_1^2}$

Λύση: i) $X_2 - X_1 \sim N(0-0, 1+1) \Rightarrow \dfrac{X_2 - X_1}{\sqrt{2}} \sim N(0,1)$

ii) $X_1 + X_2 \sim N(0+0, 1+1) \longrightarrow \dfrac{X_1 + X_2}{\sqrt{2}} \sim N(0,1)$ ①

$\dfrac{X_2 - X_1}{\sqrt{2}} \sim N(0,1)$ ②

Από ①, ② $\Rightarrow$ $$\frac{\frac{(X_1+X_2)^2}{2} \Big/ 1}{\frac{(X_2-X_1)^2}{2} \Big/ 1} \sim F_{1,1}$$

iii) $$\frac{\dfrac{X_1+X_2}{\sqrt{2}} \left(\sim N(0,1)\right)}{\sqrt{\underbrace{\dfrac{(X_1-X_2)^2}{2} \Big/ 1}_{\to \chi_1^2}}} = t_1$$, διότι $X_1 - X_2 \sim N(0,2)$

$\longrightarrow \dfrac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}} \sim N(0,1)$

iv) $\dfrac{X_2^2}{X_1^2} \sim F_{1,1}$

Άσκηση 3.7 (Βιβλίο Λουκά-Παπαϊωάννου) σελ. 87

Έστω X_i, $i=1,\dots,5$, ανεξάρτητες τυπικές κανονικές τυχαίες μεταβλητές

i) Να βρεθεί η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της $X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_5^2$

ii) Να βρεθεί η σταθερά C έτσι ώστε:

$$P(-C \le 2X_5 / \sqrt{X_1^2+\dots+X_4^2} \le C) = 0.90$$

Λύση: i) $Y = X_1^2 + \dots + X_j^2$, $E(Y) = 5$

$Y \sim X_5^2$, $Var(Y) = 10$

ii) $P(-c \le \overset{*}{t_4} \le c) = 0.9$

$$* \; W = \frac{2X_5}{\sqrt{X_1^2+\dots+X_4^2}} \sim ; \qquad \left.\begin{array}{l} X_1^2+\dots+X_4^2 \sim X_4^2 \\ X_5 \sim N(0,1) \end{array}\right\} \Rightarrow W = \frac{X_5}{\sqrt{\frac{(X_1^2+\dots+X_4^2)}{4}}} \sim t_4$$

Άρα, $P(t_4 \ge C (= t_{4,\,0{,}05}) = 0{,}05$ → 2,132 (από τον πίνακα της t κατανομής)

Άσκηση 3.10 (Βιβλίο Λουκά - Παπαϊωάννου) σελ. 88

1. Έστω $X_1, \dots, X_n$ τυχαίο δείγμα από μια τυπική κανονική κατανομή $N(0,1)$. Έστω επίσης:

$$\bar{X}_k = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} X_i \quad \text{και} \quad \bar{X}_{n-k} = \frac{1}{n-k}\sum_{i=k+1}^{n} X_i$$

Να βρεθούν οι κατανομές των ακόλουθων συναρτήσεων

i) $\dfrac{(\bar{X}_k + \bar{X}_{n-k})}{2}$, ii) $k\bar{X}_k^2 + (n-k)\bar{X}_{n-k}^2$

iii) $\dfrac{X_1^2}{X_2^2}$

Λύση: i) $\left.\begin{array}{l}\bar{X}_k \sim N(0, 1/k) \\ \bar{X}_{n-k} \sim N(0, 1/n-k)\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Ανεξάρτητα}} \dfrac{\bar{X}_k + \bar{X}_{n-k}}{2} \sim$

$$\sim N\left(0, \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{n-k}\right)\right)$$

ii) $\left.\begin{array}{l}\dfrac{\bar{X}_k}{\sqrt{\frac{1}{k}}} \sim N(0,1) \\ \\ \dfrac{\bar{X}_{n-k}}{\sqrt{\frac{1}{(n-k)}}} \sim N(0,1)\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Ανεξάρτητα}} k\bar{X}_k^2 + (n-k)\bar{X}_{n-k}^2 \sim X_2^2$